

DOPORUČENÉ ÚLOHY, CVIČENÍ 5

1. Jsou dány následující matice nad \mathbb{R} .

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Určete, zda jsou následující výrazy definovány, a pokud ano, spočtete je. Mezi kterými lineárními prostory jsou příslušná zobrazení definována?

- (a) $A \cdot B$
- (b) $B \cdot A$
- (c) $C \cdot B$
- (d) $A \cdot B \cdot A \cdot D$
- (e) $A \cdot D + B$
- (f) $A \cdot D + C$
- (g) $B \cdot C + D$

2. Jsou dána zobrazení $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$, $g : \mathbb{R}^5 \rightarrow \mathbb{R}$ a $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^5$,

$$f(x) = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot (x), g\left(\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{pmatrix}\right) = (1 \quad 1 \quad -1 \quad 2 \quad -1) \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{pmatrix}, h\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Lineární zobrazení $A : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ je dáno předpisem

$$A\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = f(g(h\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right))).$$

Nalezněte matici reprezentující lineární zobrazení A (v terminologii z posledního cvičení jde o matici zobrazení A vůči kanonickým bázím, tj. $A_{E_2 \rightarrow E_3}$).

3. Nalezněte pro lineární zobrazení $A : \mathbb{R}^{\leq 3}[x] \rightarrow \mathbb{R}^2$, $a + bx + cx^2 + dx^3 \mapsto \begin{pmatrix} d - c \\ a + b \end{pmatrix}$, uspořádané báze $B_1 = (x^3, x^2, x, 1)$, $B_2 = (5x^2 + 1, -x^3 + 2x, 2x^2 + 4, 3x^3 - 2x + 1)$, a kanonickou bázi E_2 prostoru \mathbb{R}^2 ,

- (a) matici $[A]_{B_1 \rightarrow E_2}$ (tj. matici zobrazení A v bázích B_1 a E_2),
- (b) matici $[A]_{B_2 \rightarrow E_2}$ (tj. matici zobrazení A v bázích B_2 a E_2),.

4. Rozhodněte, zda jsou následující zobrazení $Lin(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2) \rightarrow Lin(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ lineární.

- (a) $A(X) = X^2$,
- (b) $A(X) = B + X$, v závislosti na matici $B \in Lin(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$.
- (c) $A(X) = B \cdot X$, v závislosti na matici $B \in Lin(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$.